Leon Jakobi

Das Halpern-Verfahren

1. Definition des Verfahrens
2. Hilfsresultate
3. Konvergenzsatz
4. Beispiele

Dies ist die schriftliche Ausarbeitung des gleichnamigen Vortrags, den der Autor am 14. Juli 2025 im Zuge des Seminars *Fixpunktverfahren in Hilbert-Räumen* an der Universität Würzburg gehalten hat. Betreut wurde das Modul von Christian Kanzow, dessen gemeinsam mit Gerd Wachsmuth verfasstes Manuskript [2] als Vorlage für diesen Text diente. Alle Ergebnisse, die anderen Quellen entnommen wurden, sind explizit gekennzeichnet.

1. Definition des Verfahrens

Im Folgenden bezeichne H stets einen reellen Hilbert-Raum mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ und davon induzierter Norm $||\cdot||$. Wir betrachten einen Operator $T : D \to D$, der auf einer nichtleeren, abgeschlossenen und konvexen Menge $D \subseteq H$ definiert sei. Insbesondere ist T demnach eine *Selbstabbildung*, bildet also D nach D ab. Des Weiteren sei T wieder *nichtexpansiv*, also

$$||T(x) - T(y)|| \leq ||x - y|| \quad \forall x, y \in D,$$

d. h., der Abstand zweier Funktionswerte ist höchstens so groß wie der der ursprünglichen beiden Punkte. Man beachte, dass T deshalb Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $L = 1$ ist. Insbesondere ist T also stetig.

Auch in diesem Vortrag lautet unser Ziel, Fixpunkte von T, d. h., Punkte $\bar{x} \in D$ mit $T(\bar{x}) = \bar{x}$, algorithmisch zu bestimmen. Dabei hatten wir bereits in vorangegangenen Vorträgen gesehen, dass die Standard-Fixpunkt-Iteration $x_{k+1} := T(x_k)$ mit einem Startwert $x_0 \in D$, die z. B. im Fixpunktsatz von Banach erfolgreich Anwendung findet, im Allgemeinen nicht zu konvergieren braucht. Um dieses Problem zu beheben, wurde dann die *Krasnoselskii–Mann-Iteration*

$$x_{k+1} := \lambda_k x_k + (1 - \lambda_k) T(x_k) \quad \forall k = 0, 1, 2, \ldots \tag{1}$$

eingeführt, bei der $T(x_k)$ mit der Iterierten x_k konvexkombiniert wird. Unter geeigneten Voraussetzungen an die dabei auftretenden Schrittweitenfolge $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ in $[0, 1]$, nämlich

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k (1 - \lambda_k) = +\infty,$$

ließ sich Konvergenz gegen einen Fixpunkt des Operators T zeigen – stets unter der Annahme, dass T zumindest einen Fixpunkt besitzt. Dies war Satz 2.4 in [3]. Allerdings handelte es sich dabei im Allgemeinen *nur* um schwache Konvergenz.

In diesem Vortrag betrachten wir nun eine leichte Modifikation der Krasnoselskii–Mann-Iteration, für die sich dann (unter gewissen Bedingungen) sogar starke Konvergenz beweisen lässt. Die Vorschrift

$$x_{k+1} := \lambda_k u + (1-\lambda_k)T(x_k) \quad \forall k = 0, 1, 2 \dots \tag{2}$$

führt auf das sogenannte *Halpern-Verfahren*. Der wesentliche Unterschied zur Krasnoselskii–Mann-Iteration besteht darin, dass hier stets Konvexkombinationen mit einem fixierten *Ankerpunkt* $u \in D$ gebildet werden. In der Praxis wird man für u dabei häufig den Startwert der Iteration x_0 wählen. Unsere Konvergenzuntersuchung lässt sich allerdings für beliebige Ankerpunkte durchführen.

2. Hilfsresultate

Bevor wir uns der Konvergenz des Halpern-Verfahrens widmen können, bedarf es zunächst einer Reihe wichtiger Hilfsresultate. Unser erstes Ergebnis ist eine Abwandlung der berühmten Parallelogrammgleichung

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2||x||^2 + 2||y||^2 \quad \forall x, y \in H$$

in Hilbert-Räumen, die man daraus für $\alpha := \frac{1}{2}$ zurückerhält.

Lemma 1 (Verallgemeinerte Parallelogrammgleichung) [1, Corollary 2.15]
Sei H ein reeller Hilbert-Raum mit $x, y \in H$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$||\alpha x + (1-\alpha)y||^2 + \alpha(1-\alpha)||x-y||^2 = \alpha||x||^2 + (1-\alpha)||y||^2.$$

Beweis: Wir machen uns zu Nutzen, dass die Norm durch ein zugrunde liegendes Skalarprodukt induziert wird. Damit lassen sich alle Ausdrücke ähnlich einer binomischen Formel „ausmultiplizieren“:

$$||x-y||^2 = \langle x-y, x-y\rangle = ||x||^2 - 2\langle x, y\rangle + ||y||^2. \tag{3}$$

Analog erhält man auch

$$||\alpha x + (1-\alpha)y||^2 = \alpha^2||x||^2 + 2\alpha(1-\alpha)\langle x, y\rangle + (1-\alpha)^2||y||^2. \tag{4}$$

Multiplizieren wir also (3) mit $\alpha(1-\alpha)$ und addieren das Ergebnis zu (4), so ergibt sich

$$\begin{aligned} &||\alpha x + (1-\alpha)y||^2 + \alpha(1-\alpha)||x-y||^2 \\ &\quad = \big(\alpha^2 + \alpha(1-\alpha)\big)||x||^2 + \big((1-\alpha)^2 + \alpha(1-\alpha)\big)||y||^2 \\ &\quad = \alpha||x||^2 + (1-\alpha)||y||^2, \end{aligned}$$

was zu zeigen war. ■

Da in Hilbert-Räumen meist das Arbeiten mit dem Normquadrat leichter ist als mit der Norm selbst, ist die (verallgemeinerte) Parallelogrammgleichung von großem Nutzen. Mit ihr lässt sich oft ähnlich argumentieren wie mit der Dreiecksungleichung in allgemeinen normierten Räumen. Nebenbei bemerkt impliziert Lemma 1, dass die Funktion $x \mapsto ||x||^2$ in Hilbert-Räumen strikt konvex ist, also dass

$$||\lambda x + (1-\lambda)y||^2 < \lambda ||x||^2 + (1-\lambda)||y||^2$$

für alle $x, y \in H$ mit $x \neq y$ und $\lambda \in]0,1[$. Normierte Räume, deren Normquadrat diese Eigenschaft erfüllt, heißen *strikt konvexe Räume*.

Für die nachfolgenden Überlegungen spielt der Projektionsoperator eine zentrale Rolle. Dessen Definition und wichtigste Eigenschaften sollen hier deshalb kurz wiederholt werden. Ziel ist es, zu einer gegebenen Teilmenge $C \subseteq H$ und einem Punkt $x \notin C$ ein möglichst nah an x gelegenes Element $y \in C$ zu finden. Gesucht wird also ein Punkt $\bar{y}$, der den *Minimalabstand*

$$\operatorname{dist}_C(x) := \inf\big\{||x-y|| \;\big|\; y \in C\big\} \tag{5}$$

von C zu x realisiert. Dies wird mitnichten immer möglich sein, wie man sich schon anhand sehr einfacher Beispiele für C überlegen kann. Um die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung des Optimierungsproblems (5) zu garantieren, bedarf es also gewisser Zusatzvoraussetzungen an C.

Lemma 2 (Projektionssatz)
Sei H ein reeller Hilbert-Raum, $C \subseteq H$ nichtleer, abgeschlossen und konvex sowie $x \in H$ gegeben. Dann existiert genau ein $p \in C$ mit $||x-p|| = \operatorname{dist}_C(x)$. Wir nennen p die Projektion *von x auf C und schreiben dafür auch $P_C(x)$. Allgemeiner ist ein $p \in H$ genau dann die Projektion von x auf C, wenn*

$$p \in C \quad \textit{und} \quad \langle p-x, y-p\rangle \geq 0 \;\; \textit{für alle } y \in C$$

gilt. Außerdem ist der Projektionsoperator *$P_C : H \to C$ nichtexpansiv.*

Die Ergebnisse von Lemma 2 setzen wir als bekannt voraus. Beweise findet man in [1, Abschnitt 3.2]. Übrigens folgt die Eindeutigkeit der Projektion unmittelbar aus der strikten Konvexität von $x \mapsto ||x||^2$, die wir zuvor als Konsequenz von Lemma 1 erhalten hatten.

Es sei daran erinnert, dass $\operatorname{Fix}(T) := \{\bar{x} \in D \mid T(\bar{x}) = \bar{x}\}$ die Menge aller Fixpunkte der Abbildung $T : D \to D$ bezeichnet. Um später auf diese Menge projizieren zu können, bedarf es der nachfolgenden Überlegungen. Zur Erinnerung: Eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in H ist *stark konvergent* gegen einen Punkt $x \in H$, falls

$$x_k \to x :\Longleftrightarrow ||x_k - x|| \to 0.$$

Starke Konvergenz ist also Normkonvergenz.

Lemma 3 (Fix(T) ist abgeschlossen und konvex) [1, Proposition 4.22]
Sei H ein reeller Hilbert-Raum, $D \subseteq H$ nichtleer, abgeschlossen und konvex sowie $T : D \to D$ ein nichtexpansiver Operator. Dann ist Fix(T) *abgeschlossen und konvex.*

Beweis: Für die Abgeschlossenheit sei zunächst eine Folge $(\bar{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in Fix(T) gewählt mit $\bar{x}_k \to \bar{x}$ für ein $\bar{x} \in H$. Wegen der Abgeschlossenheit von D gilt bereits $\bar{x} \in D$. Wir können also T in $\bar{x}$ auswerten. Nun ist $T(\bar{x}_k) = \bar{x}_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$, so dass die Stetigkeit von T sofort

$$T(\bar{x}) = \lim_{k\to\infty} T(\bar{x}_k) = \lim_{k\to\infty} \bar{x}_k = \bar{x}$$

liefert. Insbesondere ist $\bar{x} \in \mathrm{Fix}(T)$ und die Menge der Fixpunkte $\mathrm{Fix}(T)$ deshalb abgeschlossen.

Für die Konvexität wählen wir $\bar{x}, \bar{y} \in \mathrm{Fix}(T)$ mit $\bar{x} \neq \bar{y}$ und $\lambda \in \,]0,1[$. Wegen der Konvexität von D gilt wieder $\bar{z}_\lambda := \lambda\bar{x} + (1-\lambda)\bar{y} \in D$. Somit können wir T entlang der Verbindungsstrecke von $\bar{y}$ zu $\bar{x}$ auswerten. Dort gilt aber

$$\begin{aligned}
||T(\bar{z}_\lambda) - \bar{z}_\lambda||^2 &= ||\lambda(T(\bar{z}_\lambda) - \bar{x}) + (1-\lambda)(T(\bar{z}_\lambda) - \bar{y})||^2 \\
&= \lambda||T(\bar{z}_\lambda) - \bar{x}||^2 + (1-\lambda)||T(\bar{z}_\lambda) - \bar{y}||^2 - \lambda(1-\lambda)||\bar{x} - \bar{y}||^2 \\
&= \lambda||T(\bar{z}_\lambda) - T(\bar{x})||^2 + (1-\lambda)||T(\bar{z}_\lambda) - T(\bar{y})||^2 - \lambda(1-\lambda)||\bar{x} - \bar{y}||^2 \\
&\leq \lambda||\bar{z}_\lambda - \bar{x}||^2 + (1-\lambda)||\bar{z}_\lambda - \bar{y}||^2 - \lambda(1-\lambda)||\bar{x} - \bar{y}||^2 \\
&= ||\lambda(\bar{z}_\lambda - \bar{x}) + (1-\lambda)(\bar{z}_\lambda - \bar{y})||^2 \\
&= 0,
\end{aligned}$$

also $\bar{z}_\lambda \in \mathrm{Fix}(T)$. Damit ist die Menge $\mathrm{Fix}(T)$ konvex. Für die zweite und vorletzte Gleichheit wurde dabei Lemma 1 verwendet, für die dritte Gleichheit $\bar{x}, \bar{y} \in \mathrm{Fix}(T)$ und für die Ungleichung die Nichtexpansivität von T. ■

Als nächstes widmen wir uns der schwachen Konvergenz in Hilbert-Räumen. Zur Erinnerung: Eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in H ist *schwach konvergent* gegen einen Punkt $x \in H$, falls

$$x_k \rightharpoonup x :\iff \langle x_k, y\rangle \to \langle x, y\rangle \text{ für alle } y \in H.$$

Dies lässt sich bekanntlich im unendlichdimensionalen Fall als eine Verallgemeinerung von komponentenweiser Konvergenz auffassen. Das Standardbeispiel der Einheitsvektoren

$$(1,0,0,0,0,\ldots), \quad (0,1,0,0,0,\ldots), \quad (0,0,1,0,0,\ldots), \quad \ldots$$

im Folgenraum ℓ^2, die offenbar schwach gegen die Nullfolge $(0,0,\ldots)$ konvergieren, belegt, dass schwach konvergente Folgen in (stark) abgeschlossenen Mengen (hier $S := \{x \in \ell^2 \mid ||x|| = 1\}$) Grenzwerte haben können, die außerhalb der Menge liegen. Das folgende Resultat entstammt Theorem 3.34 in [1]. Es zeigt, dass dieses Phänomen nicht auftreten kann, wenn die Folge aus einer konvexen Menge entnommen wird.

Lemma 4 (Konvexe abgeschlossene Mengen sind schwach folgenabgeschlossen)
Sei H ein reeller Hilbert-Raum, $C \subseteq H$ nichtleer, abgeschlossen und konvex. Dann ist C auch schwach folgenabgeschlossen, *d. h., jede schwach konvergente Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in C mit Grenzwert $x \in X$ (also $x_k \rightharpoonup x$) erfüllt bereits $x \in C$.*

Beweis: Dank der Voraussetzungen an die Menge C ist der Projektionsoperator $P_C : H \to C$ wohldefiniert. Man wähle jetzt eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in C, die schwach gegen ein $x \in H$ konvergiert, d. h., $x_n \rightharpoonup x$. Dann liefert der Projektionssatz (Lemma 2) speziell für $y := x_k$, $k \in \mathbb{N}$ die Ungleichungen

$$\big\langle P_C(x) - x, x_k - P_C(x)\big\rangle \geq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Zusammen mit der Definition der schwachen Konvergenz ergibt sich daraus unmittelbar

$$-||x - P_C(x)||^2 = \big\langle P_C(x) - x, x - P_C(x)\big\rangle = \lim_{k\to\infty} \big\langle P_C(x) - x, x_k - P_C(x)\big\rangle \geq 0,$$

also $x = P_C(x) \in C$. ■

Das vorherige Resultat gilt übrigens allgemeiner in normierten Räumen. Dort stützt sich der Beweis allerdings auf einen Trennungssatz, anstatt auf die Projektion zurückzugreifen.

Zu guter Letzt halten wir ein Hilfsresultat fest, das bereits im Kontext der Krasnoselskii–Mann-Iteration benötigt wurde. Dafür erinnern wir zunächst an eine grundlegende Eigenschaft der schwachen Konvergenz: Seien $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Folgen in H mit $x_k \to x$ und $y_k \rightharpoonup y$ für $x, y \in H$. Dann gilt mit der Cauchy–Schwarz-Ungleichung

$$\langle x_k, y_k\rangle = \langle x_k - x, y_k\rangle + \langle x, y_k\rangle \leq ||x_k - x|| \cdot ||y_k|| + \langle x, y_k\rangle \to \langle x, y\rangle, \tag{6}$$

denn $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist als schwach konvergente Folge bekanntlich beschränkt (als Konsequenz aus dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit, vgl. [1, Lemma 2.22]).

Lemma 5 (Prinzip der Demiabgeschlossenheit) [3, Lemma 2.3]
Sei H ein reeller Hilbert-Raum, $D \subseteq H$ nichtleer, abgeschlossen und konvex, $T : D \to H$ ein nichtexpansiver Operator und $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in D mit $x_k \rightharpoonup \bar{x}$ und $x_k - T(x_k) \to 0$ für ein $\bar{x} \in H$. Dann ist $\bar{x} \in \operatorname{Fix}(T)$, d. h., $T(\bar{x}) = \bar{x}$.

Beweis: Da D nichtleer, abgeschlossen und konvex ist, impliziert Lemma 4, dass D auch schwach folgenabgeschlossen ist. Aus $x_k \rightharpoonup \bar{x}$ erhalten wir also bereits $\bar{x} \in D$. Insbesondere darf T in $\bar{x}$ ausgewertet werden. Die Nichtexpansivität von T liefert dann

$$\begin{aligned}
||\bar{x} - T(\bar{x})||^2 &= ||(x_k - \bar{x}) + \big(\bar{x} - T(\bar{x})\big)||^2 - ||x_k - \bar{x}||^2 - 2\big\langle x_k - \bar{x}, \bar{x} - T(\bar{x})\big\rangle \\
&= ||\big(x_k - T(x_k)\big) + \big(T(x_k) - T(\bar{x})\big)||^2 - ||x_k - \bar{x}||^2 - 2\big\langle x_k - \bar{x}, \bar{x} - T(\bar{x})\big\rangle \\
&= ||x_k - T(x_k)||^2 + 2\big\langle x_k - T(x_k), T(x_k) - T(\bar{x})\big\rangle + ||T(x_k) - T(\bar{x})||^2 \\
&\qquad - ||x_k - \bar{x}||^2 - 2\big\langle x_k - \bar{x}, \bar{x} - T(\bar{x})\big\rangle \\
&\leq ||x_k - T(x_k)||^2 + 2\big\langle x_k - T(x_k), T(x_k) - T(\bar{x})\big\rangle - 2\big\langle x_k - \bar{x}, \bar{x} - T(\bar{x})\big\rangle
\end{aligned}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Da $x_k - T(x_k) \to 0$, verschwindet der erste Term bei $k \to \infty$. Gleiches gilt für den letzten Summanden, da $x_k \rightharpoonup \bar{x}$. Dass auch der mittlere Term gegen Null strebt, folgt zu guter Letzt aus $x_k - T(x_k) \to 0$ und

$$T(x_k) - T(\bar{x}) = (T(x_k) - x_k) + (x_k - \bar{x}) + \big(\bar{x} - T(\bar{x})\big) \rightharpoonup \bar{x} - T(\bar{x})$$

(stark konvergente Folgen sind auch schwach konvergent und die Summe schwach konvergenter Folgen ist schwach konvergent) mit (6). Alles in allem haben wir damit $\bar{x} = T(\bar{x})$ gezeigt. ■

Man beachte: Das Prinzip der Demiabgeschlossenheit liefert ein hinreichendes Kriterium dafür, dass der schwache Grenzwert einer Folge ein Fixpunkt ist.

3. Konvergenzsatz

Nach diesen Vorbereitungen kommen wir nun zu dem Hauptresultat dieses Vortrags.

Satz 6 (Konvergenzsatz für das Halpern-Verfahren)
Sei H ein reeller Hilbert-Raum, $D \subseteq H$ nichtleer, abgeschlossen und konvex, $T : D \to D$

ein nichtexpansiver Operator mit $\mathrm{Fix}(T) \neq \varnothing$. *Sei außerdem ein Ankerpunkt* $u \in D$ *und eine Folge* $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ *in* $[0,1]$ *gewählt, so dass*

$$\textit{(a)}\ \lambda_k \to 0, \quad \textit{(b)}\ \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k = +\infty, \quad \textit{(c)}\ \sum_{k=0}^{\infty} |\lambda_{k+1} - \lambda_k| < +\infty.$$

Dann konvergiert die von einem beliebigen Startwert $x_0 \in D$ *durch* (2) *erzeugte Folge* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ *stark gegen einen Fixpunkt von* T. *Genau genommen gilt* $x_k \to P_{\mathrm{Fix}(T)}(u)$, *wobei* $P_{\mathrm{Fix}(T)}(u)$ *die Projektion von* u *auf* $\mathrm{Fix}(T)$ *bezeichnet.*

Beweis: Zunächst ist festzuhalten, dass die Projektion $P_{\mathrm{Fix}(T)}(u)$ überhaupt gebildet werden kann, da $C := \mathrm{Fix}(T)$ nach Lemma 3 tatsächlich eine abgeschlossene und konvexe Menge ist (nichtleer ist sie nach Voraussetzung).

Zur Vorbereitung erinnern wir vorweg an die für alle $\xi \in [0,1[$ gültige Ungleichung $\ln(1-\xi) \leq -\xi$. Dank dieser ist

$$\prod_{k=N}^{n}(1-\lambda_k) = \exp\Big(\sum_{k=N}^{n} \ln(1-\lambda_k)\Big) \leq \exp\Big(\sum_{k=N}^{n} -\lambda_k\Big)$$

für alle $n, N \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$. Bei $n \to \infty$ ergibt sich mithilfe von Vorausetzung (b) dann

$$\prod_{k=N}^{\infty}(1-\lambda_k) := \lim_{n\to\infty} \prod_{k=N}^{n}(1-\lambda_k) = 0 \quad \forall N \in \mathbb{N}_0. \tag{7}$$

Nun unterscheiden wir zwei Fälle für den Startwert x_0.

Fall 1: Sei $x_0 = u$. Zunächst zeigen wir, dass die Iterierten sich nicht weiter von $C = \mathrm{Fix}(T)$ entfernen können als der Startwert. Zu beliebigem aber festem $\bar{y} \in C$ ist also

$$||x_k - \bar{y}|| \leq ||u - \bar{y}|| \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$$

nachzuweisen. Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion nach k. Für $k = 0$ ist die Aussage offenbar richtig dank unserer Wahl von x_0. Nun gelte die Behauptung für ein beliebiges $k \in \mathbb{N}_0$. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
||x_{k+1} - \bar{y}|| &= ||\lambda_k(u-\bar{y}) + (1-\lambda_k)(T(x_k) - \bar{y})|| && \text{(nach (2))}\\
&\leq \lambda_k||u-\bar{y}|| + (1-\lambda_k)||T(x_k) - \bar{y}|| && \text{(Dreiecksungleichung)}\\
&= \lambda_k||u-\bar{y}|| + (1-\lambda_k)||T(x_k) - T(\bar{y})|| && (\bar{y} \in \mathrm{Fix}(T))\\
&\leq \lambda_k||u-\bar{y}|| + (1-\lambda_k)||x_k - \bar{y}|| && \text{(Nichtexpansivität von } T)\\
&\leq \lambda_k||u-\bar{y}|| + (1-\lambda_k)||u - \bar{y}|| && \text{(Induktionsvoraussetzung)}\\
&= ||u-\bar{y}||.
\end{aligned}$$

Damit ist der Induktionsbeweis erbracht. Außerdem wurde implizit $||T(x_k) - \bar{y}|| \leq ||u - \bar{y}||$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ mitbewiesen.

Ziel im Folgenden wird es sein, $x_k - T(x_k) \to 0$ zu zeigen, um dann das Prinzip der Demiabgeschlossenheit ins Spiel zu bringen. Zunächst einmal sind nach obiger Diskussion die Folgen $(x_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ und $(T(x_k))_{k\in\mathbb{N}_0}$ beschränkt. Insbesondere existiert daher eine Konstante $\mu \geq 0$ mit

$$\max\big\{||x_{k+1} - x_k||, ||u - T(x_k)||\big\} \leq \mu \quad \forall k \in \mathbb{N}_0. \tag{8}$$

Zudem liefert die Definition der Iteration (2) zum einen

$$x_{k+1} - T(x_k) = \lambda_k\big(u - T(x_k)\big) \to 0 \quad \text{für } k \to \infty \tag{9}$$

im Zusammenspiel mit der Beschränktheit der $T(x_k)$ sowie Voraussetzung (a) und zum anderen

$$\begin{aligned} x_{k+2} - x_{k+1} &= \big[\lambda_{k+1}u + (1-\lambda_{k+1})T(x_{k+1}) - \lambda_k u - (1-\lambda_k)T(x_k)\big] \\ &\quad + \lambda_{k+1}T(x_k) - \lambda_{k+1}T(x_k) \\ &= (\lambda_{k+1} - \lambda_k)\big(u - T(x_k)\big) + (1-\lambda_{k+1})\big(T(x_{k+1}) - T(x_k)\big) \end{aligned}$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Die Nichtexpansivität von T und die Wahl der Konstante μ in (8) implizieren somit die Abschätzung

$$||x_{k+2} - x_{k+1}|| \le \mu|\lambda_{k+1} - \lambda_k| + (1-\lambda_{k+1})||x_{k+1} - x_k|| \quad \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

Induktiv erhält man daraus unter Ausnutzung von $1 - \lambda_k \le 1$ dann

$$\begin{aligned} ||x_{k+2} - x_{k+1}|| &\le \mu \sum_{n=K}^{k} |\lambda_{n+1} - \lambda_n| + ||x_{K+1} - x_K|| \prod_{n=K}^{k}(1-\lambda_{n+1}) \\ &\le \mu \sum_{n=K}^{k} |\lambda_{n+1} - \lambda_n| + \mu \prod_{n=K}^{k}(1-\lambda_{n+1}) \end{aligned}$$

für alle $K, k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \ge K$. Geht man mit $k \to \infty$ zur Grenze über, ergibt sich aus (7) somit

$$\limsup_{k\to\infty} ||x_{k+2} - x_{k+1}|| \le \mu \sum_{n=K}^{\infty} |\lambda_{n+1} - \lambda_n|$$

für alle $K \in \mathbb{N}_0$. Hinsichtlich Voraussetzung (c) impliziert $K \to \infty$ dann $x_{k+1} - x_k \to 0$. Zusammen mit (9) erhalten wir

$$x_k - T(x_k) = (x_k - x_{k+1}) + \big(x_{k+1} - T(x_k)\big) \to 0 \quad \text{für } k \to \infty. \tag{10}$$

Damit ist das zweite Etappenziel erreicht.

Nun betrachten wir die Folge

$$\alpha_k := \big\langle T(x_k) - P_C(u), u - P_C(u)\big\rangle, \quad k \in \mathbb{N}_0 \tag{11}$$

in $\mathbb{R}$. Die Cauchy–Schwarz-Ungleichung zeigt, dass

$$|\alpha_k| \le ||T(x_k) - P_C(u)|| \cdot ||u - P_C(u)|| \quad \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

Wegen der Beschränktheit von $(T(x_k))_{k\in\mathbb{N}_0}$ ist deshalb auch $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ beschränkt. Insbesondere ist $\limsup_{k\to\infty} \alpha_k < \infty$. Unser nächstes Ziel ist es, die Worst-Case-Abschätzung

$$\limsup_{k\to\infty} \alpha_k \le 0 \tag{12}$$

für den Limes superior nachzuweisen. Wie bei jeder reellwertigen beschränkten Folge lässt sich auch aus $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine Teilfolge $(\alpha_{k_n})_{n\in\mathbb{N}_0}$ auswählen, entlang der

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_{k_n} = \limsup_{k\to\infty} \alpha_k. \tag{13}$$

Die dazugehörige Teilfolge der Iterierten $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}_0}$ in D ist (wie auch die Ausgangsfolge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ selbst) beschränkt. Wegen einer Konsequenz aus dem Satz von Eberlein–Šmulian (vgl. [1, Lemma 2.45]) können wir daher ohne Einschränkung der Allgemeinheit davon ausgehen, dass die Teilfolge $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}_0}$ gerade so gewählt ist, dass sie schwach gegen einen Grenzwert $\bar{x} \in H$ konvergiert (d. h., $x_{k_n} \rightharpoonup \bar{x}$). Dank dem Prinzip der Demiabgeschlossenheit aus Lemma 5, das wegen (10) anwendbar ist, gilt sogar $\bar{x} \in C = \mathrm{Fix}(T) \subseteq D$, d. h., $T(\bar{x}) = \bar{x}$. Außerdem folgt aus (10) auch $T(x_{k_n}) \rightharpoonup \bar{x}$. Insgesamt erhalten wir nach Einsetzen von (11) in (13) dann wie gewünscht

$$\begin{aligned}
\limsup_{k\to\infty} \alpha_k &= \lim_{n\to\infty} \big\langle T(x_{k_n}) - P_C(u), u - P_C(u)\big\rangle \\
&= \lim_{n\to\infty} \big\langle T(x_{k_n}) - x_{k_n}, u - P_C(u)\big\rangle + \lim_{n\to\infty} \big\langle x_{k_n} - P_C(u), u - P_C(u)\big\rangle \\
&= \big\langle \bar{x} - P_C(u), u - P_C(u)\big\rangle \\
&\le 0.
\end{aligned}$$

Dabei ist die letzte Ungleichung eine Konsequenz aus dem Projektionssatz (Lemma 2), der hier speziell für $y := \bar{x} \in C$ Verwendung findet.

Im letzten Schritt möchten wir nun endlich zeigen, dass $x_k \to P_C(u)$ gilt. Sei dazu ein beliebiges $\varepsilon > 0$ gegeben. Wegen Voraussetzung (a) an die Folge $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ und (12) gilt

$$\lambda_k \operatorname{dist}_C(u)^2 \le \varepsilon \quad \text{und} \quad \big\langle T(x_k) - P_C(u), u - P_C(u)\big\rangle \le \varepsilon \tag{14}$$

für alle hinreichend großen $k \in \mathbb{N}_0$, etwa $k \ge K$ mit einem passenden $K \in \mathbb{N}_0$. Hierbei bezeichnet $\operatorname{dist}_C(u)$ wieder den Minimalabstand von u zu C, vgl. (5). Man erhält

$$\begin{aligned}
||x_{k+1} - P_C(u)||^2 &= ||\lambda_k\big(u - P_C(u)\big) + (1-\lambda_k)\big(T(x_k) - P_C(u)\big)||^2 \\
&= \lambda_k^2 \operatorname{dist}_C(u)^2 + 2\lambda_k(1-\lambda_k)\big\langle u - P_C(u), T(x_k) - P_C(u)\big\rangle \\
&\quad + (1-\lambda_k)^2||T(x_k) - P_C(u)||^2 \\
&\le \lambda_k\varepsilon + 2\lambda_k(1-\lambda_k)\varepsilon + (1-\lambda_k)^2||T(x_k) - T\big(P_C(u)\big)||^2 \\
&\le \lambda_k\varepsilon + 2\lambda_k\varepsilon + (1-\lambda_k)||x_k - P_C(u)||^2 \\
&= 3\lambda_k\varepsilon + (1-\lambda_k)||x_k - P_C(u)||^2
\end{aligned}$$

für alle $k \ge K$. Dabei folgt die erste Gleichheit aus (2), die zweite durch „ausmultiplizieren“ des Skalarprodukts und Lemma 2, die erste Ungleichung aus (14) und $P_C(u) \in C = \mathrm{Fix}(T)$ und die zweite Ungleichung aus der Nichtexpansivität von T und $1-\lambda_k \le 1$. Induktiv ergibt sich jetzt

$$||x_{k+1} - P_C(u)||^2 \le 3\varepsilon + ||x_K - P_C(u)||^2 \textstyle\prod_{n=K}^{k}(1-\lambda_n) \tag{15}$$

für alle $k \ge K$. Der Induktionsanfang bei $k = K$ ist dabei dank der gerade gezeigten Ungleichung erfüllt. Gelte nun (15) für ein $k \ge K$. Der Induktionsschritt folgt dann aus ebenjener Ungleichung und der Induktionsvoraussetzung mittels

$$\begin{aligned}
||x_{k+2} - P_C(u)||^2 &\le 3\varepsilon\lambda_{k+1} + (1-\lambda_{k+1})||x_{k+1} - P_C(u)||^2 \\
&\le 3\varepsilon\lambda_{k+1} + (1-\lambda_{k+1})\big(3\varepsilon + ||x_K - P_C(u)||^2 \textstyle\prod_{n=K}^{k}(1-\lambda_n)\big) \\
&\le 3\varepsilon + ||x_K - P_C(u)||^2 \textstyle\prod_{n=K}^{k+1}(1-\lambda_n).
\end{aligned}$$

Hinsichtlich (7) erhalten wir aus (15) dann

$$\limsup_{k\to\infty} ||x_{k+1} - P_C(u)||^2 \le 3\varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ aber beliebig war, muss $||x_{k+1} - P_C(u)|| \to 0$ gelten, die Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ also stark gegen $P_C(u)$ konvergieren. Da $C = \mathrm{Fix}(T)$ ist, folgt so die Aussage des Satzes.

Fall 2: Sei $x_0 \neq u$. Wir führen die Argumentation auf den vorherigen Fall zurück. Sei dazu $(\tilde{x}_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ die Folge, die man aus (2) mit Startwert $\tilde{x}_0 := u$ erhalten würde. Nach der vorangegangenen Diskussion gilt $\tilde{x}_k \to P_{\mathrm{Fix}(T)}(u)$. Andererseits erhält man

$$\begin{aligned}
||x_{k+1} - \tilde{x}_{k+1}|| &= (1-\lambda_k)||T(x_k) - T(\tilde{x}_k)|| && \text{(nach (2))}\\
&\leq (1-\lambda_k)||x_k - \tilde{x}_k|| && \text{(Nichtexpansivität von } T\text{)}\\
&\leq ||x_0 - \tilde{x}_0|| \textstyle\prod_{n=0}^{k}(1-\lambda_n) && \text{(induktiv)}\\
&\to 0 \text{ für } k \to \infty. && \text{(nach (7))}
\end{aligned}$$

Dann muss auch $x_k \to P_{\mathrm{Fix}(T)}(u)$ gelten, was zu zeigen war. ■

Übrigens folgt die Bedingung (c) aus Satz 6 schon aus (a) und (b), wenn man zusätzlich annimmt, dass die Folge $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ monoton fällt, denn dann lässt sich ein Teleskop-Effekt ausnutzen:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\lambda_{k+1} - \lambda_k| = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k - \lambda_{k+1} = \lambda_0 - \lim_{k\to\infty} \lambda_k = \lambda_0 < \infty.$$

Zusammen mit der nachfolgenden Diskussion zeigt sich damit sogar, dass in diesem Fall (a) und (b) sowohl notwendige als auch hinreichende Bedingungen für die Konvergenz der Halpern-Iteration darstellen.

4. Beispiele

Im letzten Teil des Vortrags betrachten wir exemplarisch einige konkrete Anwendungen des Halpern-Verfahrens. Dabei gehen wir insbesondere genauer auf die drei Voraussetzungen

$$\text{(a) } \lambda_k \to 0, \quad \text{(b) } \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k = +\infty, \quad \text{(c) } \sum_{k=0}^{\infty} |\lambda_{k+1} - \lambda_k| < +\infty,$$

die Satz 6 an die Schrittweitenfolge $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ in $[0,1]$ stellt, ein.

Unser erstes Beispiel liefert eine ganze Schar an Schrittweiten, die diese Voraussetzungen erfüllen. Insbesondere der Fall $\alpha = 1$ ist zwecks seiner Einfachheit von großem Interesse.

Beispiel 7 (Schrittweiten, die (a), (b) und (c) erfüllen)
Betrachte für ein $\alpha \in]0,1]$ die Schrittweiten

$$\lambda_k := \frac{1}{(k+1)^\alpha}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Voraussetzung (a) ist wegen der Stetigkeit von $\xi \mapsto (\xi+1)^\alpha$, $\xi \geq 0$ trivialerweise erfüllt. Um (b) einzusehen, sei an die harmonische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} = +\infty$ erinnert, die den Fall $\alpha = 1$ abdeckt. Für $0 < \alpha < 1$ fungiert sie zudem als Minorante für die bestimmte Divergenz $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k = +\infty$, denn $\frac{1}{(k+1)^\alpha} \geq \frac{1}{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Da die Schrittweitenfolge monoton fällt, erhält man Voraussetzung (c) bereits aus (a) und (b), vgl. die Anmerkungen nach dem Beweis von Satz 6. ◆

Unser nächstes Beispiel zeigt, dass die Voraussetzung (a) aus Satz 6 eine notwendige Bedingung für die Konvergenz der Halpern-Iterierten (2) darstellt.

Beispiel 8 ((a) ist notwendig für Konvergenz) [1, Exercise 30.1]
Betrachte den Hilbert-Raum $H := \mathbb{R}$ und darin die abgeschlossene und konvexe Menge $D := [-1, 1]$ sowie den nichtexpansiven Operator $T : D \to D$, der durch $T(x) := 1$ definiert sei. Augenscheinlich ist $\bar{x} := 1$ der einzige Fixpunkt von T, also $\mathrm{Fix}(T) = \{1\}$.

Wir führen nun das Halpern-Verfahren mit Ankerpunkt $u := 0$ und Startwert $x_0 := 1$ zu einer beliebigen Folge $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ in $[0, 1]$ durch. Konkret lautet die Iteration aus (2) in diesem Fall

$$x_{k+1} = \lambda_k u + (1 - \lambda_k)T(x_k) = 1 - \lambda_k \tag{16}$$

für $k \in \mathbb{N}_0$. Um eine notwendige Bedingung abzuleiten, setzen wir voraus, dass $x_k \to \bar{x} = P_{\mathrm{Fix}(T)}(u)$. Wegen (16) und $\bar{x} = 1$ ist das aber nur möglich, falls $\lambda_k \to 0$ gilt. Das ist gerade Bedingung (a). ◆

Unser zweites Beispiel zeigt, dass die Voraussetzung (b) aus Satz 6 (fast) eine notwendige Bedingung für die Konvergenz darstellt.

Beispiel 9 ((b) ist notwendig für Konvergenz) [1, Exercise 30.1]
Betrachte den Hilbert-Raum $H := \mathbb{R}$ und darin die abgeschlossene und konvexe Menge $D := [-1, 1]$ sowie den nichtexpansiven Operator $T : D \to D$, der durch $T(x) := -x$ definiert sei. Augenscheinlich ist $\bar{x} := 0$ der einzige Fixpunkt von T, also $\mathrm{Fix}(T) = \{0\}$.

Wir führen nun das Halpern-Verfahren mit Ankerpunkt $u := 0$ und Startwert $x_0 := 1$ zu einer beliebigen Folge $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ in $[0, 1[$ durch. Konkret lautet die Iteration aus (2) in diesem Fall

$$x_{k+1} = \lambda_k u + (1 - \lambda_k)T(x_k) = (-1)^{k+1} \prod_{n=0}^{k} (1 - \lambda_n) \tag{17}$$

für $k \in \mathbb{N}_0$. Um eine notwendige Bedingung abzuleiten, setzen wir voraus, dass $x_k \to \bar{x} = P_{\mathrm{Fix}(T)}(u)$. Wegen (17) und $\bar{x} = 0$ ist das aber nur möglich, falls $\prod_{n=0}^{\infty}(1 - \lambda_n) = 0$ gilt. Ähnlich wie im Beweis von Satz 6 argumentiert man jetzt, dass dies $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n = +\infty$ impliziert. Angenommen, dem wäre nicht so, die Reihe also konvergent. Insbesondere erhielte man $\lambda_k \leq \frac{1}{2}$ für alle hinreichend großen $k \in \mathbb{N}_0$, etwa $k \geq K$ mit einem passenden $K \in \mathbb{N}_0$. Aus der für alle $\xi \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ gültigen Ungleichung $\ln(1 - \xi) \geq -2\xi$ folgt nun

$$\prod_{n=K}^{k} (1 - \lambda_n) = \exp\Big(\sum_{n=K}^{k} \ln(1 - \lambda_n)\Big) \geq \exp\Big(-2\sum_{n=K}^{k} \lambda_n\Big).$$

Für $k \to \infty$ erhielte man so aber eine positive untere Schranke für $\prod_{n=K}^{\infty}(1 - \lambda_n)$. Gleichzeitig wird $\lambda_n = 1$ auch für $n = 0, \ldots, K - 1$ nach Voraussetzung nicht angenommen. Damit wäre aber $\prod_{n=0}^{\infty}(1 - \lambda_n) > 0$, was einen Widerspruch darstellt. Folglich gilt doch $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n = +\infty$, also gerade Bedingung (b). ◆

Genau genommen zeigt das vorangegangene Beispiel nur, dass eine notwendige Bedingung dadurch gegeben ist, dass entweder (b) gilt oder es einen Index $K \in \mathbb{N}_0$ mit $\lambda_K = 1$ gibt. In Theorem 6 aus Suzukis Artikel [4] findet man ein Beispiel, das diesen Defekt behebt und obendrein noch zeigt, dass auch die Kombination aus (a) und (b) immer noch eine notwendige Bedingung für die Konvergenz der Halpern-Iterierten ist.

Die vorherigen zwei Beispiele belegen, dass man (im Allgemeinen) für die starke Konvergenz des Halpern-Verfahrens nicht ohne die Voraussetzungen (a) und (b) auskommt. Im Folgenden werden wir sehen, dass auch die Kombination der beiden noch nicht hinreichend für die Konvergenz zu sein braucht. Hinsichtlich der Anmerkung nach Satz 6 wissen wir bereits, dass man für ein passendes Gegenbeispiel eine Schrittweitenfolge benötigt, die nicht monoton fällt.

Beispiel 10 ((a) und (b) sind nicht hinreichend für Konvergenz) [4, Example 4]
Betrachte den Hilbert-Raum $H := \mathbb{R}$ und darin die abgeschlossene und konvexe Menge $D := [-1, 1]$ sowie den nichtexpansiven Operator $T : D \to D$, der durch $T(x) := -x$ definiert sei. Augenscheinlich ist $\bar{x} := 0$ der einzige Fixpunkt von T, also $\operatorname{Fix}(T) = \{0\}$.

Wir führen nun das Halpern-Verfahren mit Ankerpunkt $u := 1$ und Startwert $x_0 := 1$ für die Folge

$$\lambda_k := \begin{cases} 0, & \text{falls } k \text{ gerade,} \\ \frac{1}{k}, & \text{falls } k \text{ ungerade} \end{cases}$$

in $[0, 1]$ zu $k \in \mathbb{N}_0$ durch. Man beachte, dass Voraussetzung (a) und (b) offensichtlich erfüllt sind (analog zu Beispiel 7). Konkret lautet die Iteration aus (2) in diesem Fall

$$x_{k+1} = \lambda_k u + (1 - \lambda_k) T(x_k) = (-1)^{k+1}$$

für $k \in \mathbb{N}_0$. Diese Folge ist nicht konvergent! Man beachte, dass $\sum_{k=0}^{\infty} |\lambda_{k+1} - \lambda_k| = +\infty$ gilt, Voraussetzung (c) also verletzt ist. ◆

Es sei darauf hingewiesen, dass auch Gegenbeispiele existieren, in denen die Schrittweiten stets strikt zwischen 0 und 1 liegen (z. B. [4, Example 5]).

Beispiel 10 motiviert die Einführung einer zusätzlichen Forderung neben (a) und (b). Unsere Voraussetzung (c) stammt von Wittmann und hat (anders als die ursprünglich von Halpern verwendete Bedingung) den Vorteil, dass $\lambda_k := \frac{1}{k+1}$, $k \in \mathbb{N}_0$ alle Voraussetzungen des Konvergenzsatzes erfüllt (Beispiel 7 mit $\alpha := 1$). Für Details sei hierbei erneut auf den Artikel [4] von Suzuki bzw. dessen Literaturverzeichnis verwiesen. Dort findet sich außerdem eine ausführliche Diskussion der sonstigen in der Literatur gebräuchlichen „dritten Bedingungen" mitsamt einer Analyse deren Zusammenhänge.

Zuletzt soll jetzt noch die Konvergenzgeschwindigkeit der Krasnoselskii–Mann-Iteration mit der des Halpern-Verfahrens verglichen werden. Dazu adaptieren wir Beispiel 1 aus [3].

Beispiel 11 (Vergleich von Krasnoselskii–Mann und Halpern)
Betrachte den Hilbert-Raum $H := \mathbb{R}^2$ und darin die abgeschlossene und konvexe Menge $D := H$ sowie den nichtexpansiven Operator $T : D \to D$, der durch eine 45-Grad-Drehung

$$T(x) := Ax \quad \text{mit} \quad A := \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \text{ für } \theta := \frac{\pi}{4}$$

definiert sei. Augenscheinlich ist $\bar{x} := (0, 0)^{\mathrm{T}}$ der einzige Fixpunkt von T, also $\operatorname{Fix}(T) = \{0\}$.

Wir führen nun sowohl die Krasnoselskii–Mann-Iteration (1) als auch das Halpern-Verfahren (2) je zum Startwert $x_0 := (1, 0)^{\mathrm{T}}$ mit den Schrittweiten $\lambda_k := \frac{1}{k+1}$, $k \in \mathbb{N}_0$ durch. Als Anker wählen wir für das Halpern-Verfahren dabei $u := x_0$. Man beachte, dass aus [3, Satz 2.4] und Satz 6 die (wegen der endlichen Dimension hier sogar in beiden Fällen starke) Konvergenz beider Verfahren garantiert ist. In Tabelle 1 findet man die

k	Krasnoselskii–Mann	Halpern
0	1.0000000000000000	1.0000000000000000
1	1.0000000000000000	1.0000000000000000
2	0.9238795325112867	0.9238795325112867
3	0.8616509034882763	0.8047378541243652
4	0.8129552039315513	0.6532814824381884
5	0.7739206174465194	0.4828427124746191
6	0.7417700174692649	0.3079598441704290
7	0.7146718528175190	0.1428571428571429
8	0.6913982422730938	0.0000000000000000
9	0.6710996944333723	0.1111111111111110
10	0.6531697248062645	0.1847759065022573
100	0.3443085083517849	0.0261312592975275
1000	0.1754570970552421	0.0000000000000000
10000	0.0894161336694345	0.0000000000000000
100000	0.0455550457634175	0.0000000000000000

Tabelle 1: Euklidische Norm der Iterierten aus Beispiel 11.

euklidischen Normen der entsprechenden Iterierten, die sich bei Ausnutzung der vollen Rechengenauigkeit unseres Computers ergeben. Offenbar schlägt das Halpern-Verfahren die Krasnoselskii–Mann-Iteration hier im direkten Vergleich. Allerdings beobachten wir auch, wie das Halpern-Verfahren in $k = 8$ die korrekte Lösung nahezu findet, nur um die Iteration dann für $k = 9$ zu Gunsten des Ankers wieder von dieser wegzulenken. Diese „Blindheit“ des Algorithmus ließe sich über ein entsprechendes Abbruchkriterium abfangen. ◆

Zur Ehrenrettung der Krasnoselskii–Mann-Iteration sei an dieser Stelle noch erwähnt, dass die (sehr langsame) Konvergenzgeschwindigkeit, die im vorherigen Beispiel beobachtet wurde, hauptsächlich der Wahl der Schrittweite geschuldet ist. Analoge Rechnung mit $\lambda_k := \frac{1}{2}$, $k \in \mathbb{N}_0$ hätte deutlich schnellere Konvergenz geliefert. Diese Schrittweite erfüllt allerdings nur den Konvergenzsatz für die Krasnoselskii–Mann-Iteration und nicht den für das Halpern-Verfahren. Sie ist also für einen Vergleich der beiden ungeeignet.

Literatur

[1] Heinz H. Bauschke und Patrick L. Combettes: *Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces.* 2. Auflage. Springer, 2017. doi: 10.1007/978-3-319-48311-5.

[2] Christian Kanzow und Gerd Wachsmuth: *Infinite-dimensional Optimization.* Auszüge aus einem Buchprojekt, April 2025.

[3] Simon Schwab: *Krasnoselskii-Mann Iteration.* Schriftliche Ausarbeitung des gleichnamigen Seminarvortrags, Juni 2025.

[4] Tomonari Suzuki: “Reich’s problem concerning Halpern’s convergence”. In: *Archiv der Mathematik* 92.6 (2009), S. 602–613. doi: 10.1007/s00013-009-2945-4.